کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه خط راست است ... البته گاهی هم نیست!

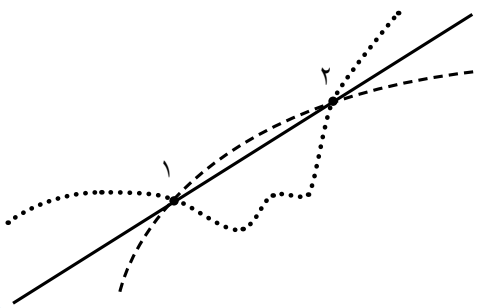
بهزاد اسلامی مسلّم

کلیدواژه‌ها: آموزش هندسه، کوتاه‌ترین فاصله

ممکن است وقتی عبارت «کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه» را می‌خوانید، این جمله را به یاد بیاورید:

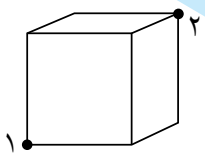
کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه، خط راست بین آن دو نقطه است.

مثلاً در شکل ۱ برای رفتن از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲، مسیر نقطه‌چین و مسیر خط‌چین از مسیر دیگر طولانی‌تر هستند.



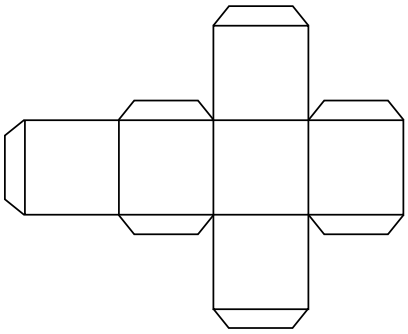
جملهٔ بالا در موقعیت‌هایی که مانعی برای حرکت روی خط راست وجود نداشته باشد درست است. یعنی در واقع این موضوع، در یک صفحه درست است. اما در بعضی مسئله‌ها، کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه خط راست نیست! تا حالا چند مسئله دیده‌ام یا از دیگران شنیده‌ام که این‌گونه‌اند. بیایید چند تا از آن‌ها را با هم حل کنیم.

مسئله ۱. شکل ۲ شکل یک مکعب است. در نقطهٔ ۱ عنکبوتی ایستاده است و در نقطهٔ ۲ مگسی دارد چرت می‌زند. عنکبوت می‌خواهد از کوتاه‌ترین فاصله ممکن روی جعبه حرکت کند و به مگس برسد. عنکبوت از چه مسیری باید برود؟

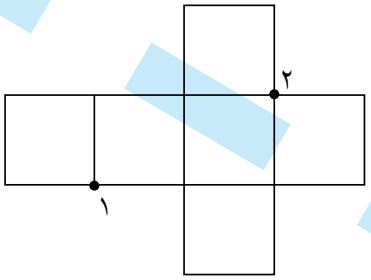


راه‌حل: پاسخ این مسئله خط راست بین نقاط ۱ و ۲ نیست، زیرا عنکبوت روی جعبه است و نمی‌تواند داخلش شود. اما حتی اگر می‌توانست به داخل جعبه برود، باز هم فقط می‌توانست روی دیوارهای جعبه حرکت کند؛ چون عنکبوت‌ها پرواز نمی‌کنند!

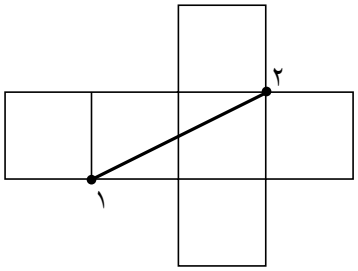
به یاد دارید که اگر می‌خواستیم با مقوا مکعب درست کنیم، شکل ۳ را روی مقوا رسم می‌کردیم.



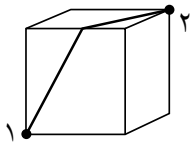
برای درست شدن مکعب باید لبه‌ها را چسب می‌زدیم. اما بیایید مکعب را درست نکنیم! به جای آن، نقاط ۱ و ۲ را روی شکل‌ها مشخص می‌کنیم.



حالا می‌توانید بگویید که کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین نقطه‌های ۱ و ۲ چیست: خط راست!



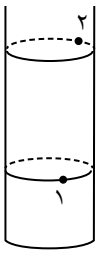
پس خط راست را رسم می‌کنیم و مکعب را تشکیل می‌دهیم تا مسیر عنکبوت مشخص شود.



نکته: با استفاده از قضیهٔ تالس، می‌توانیم ثابت کنیم که مسیری که رسم کرده‌ایم، دقیقاً از وسط ضلع مکعب می‌گذرد.

مسئلهٔ ۲. ستونی استوانه‌ای (مانند شکل ۷) جلوی ساختمانی بلند قرار دارد. مورچه‌ای می‌خواهد از نقطهٔ ۱ به

نقطهٔ ۲ برسد (نقطهٔ ۱ در جلوی ستون و نقطهٔ ۲ پشت ستون است.) مورچه چه مسیری را طی کند تا طول مسیر، کمترین مقدار باشد؟

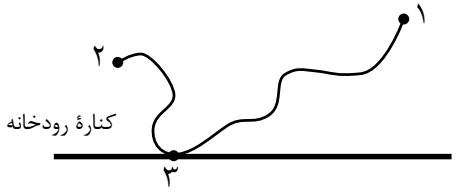


راه‌حل: پاسخ خط راست بین نقاط ۱ و ۲ نیست، چون خط راست بین این دو نقطه از داخل ستون می‌گذرد! راه‌حل این مسئله خیلی شبیه راه‌حل مسئلهٔ ۱ است. اگر بخواهید ستونی استوانه‌ای با مقوا درست کنید، چه شکلی روی مقوا رسم می‌کنید؟

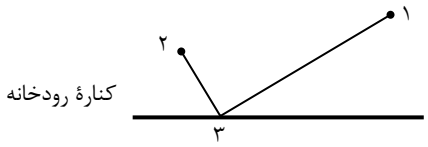
مسئلهٔ ۳. در نقطهٔ ۱ ایستاده‌ایم. ناگهان متوجه می‌شویم که در نقطهٔ ۲ آتشی شعله‌ور است. باید سریع با سطل به کنار رودخانه برویم، آب برداریم و به نقطهٔ ۲ برویم تا آتش را خاموش کنیم. کوتاه‌ترین مسیر را برای این کار مشخص کنید.

کنارهٔ رودخانه

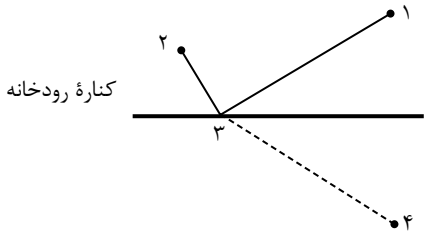
راه‌حل: در مسیرمان باید از رودخانه آب برداریم. پس حتماً در نقطه‌ای از مسیر، به ساحل رودخانه می‌رسیم. این نقطه را نقطهٔ ۳ بنامید. البته ما نمی‌دانیم نقطهٔ ۳ دقیقاً کجاست. باید جای نقطهٔ ۳ را مشخص کنیم.



مسیر از ۱ به ۳ و نیز مسیر از ۳ به ۲ باید خط راست باشد، زیرا هیچ محدودیتی برای حرکت روی خط راست وجود ندارد.

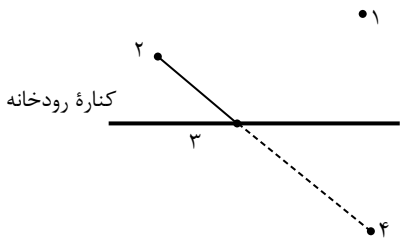


قرینهٔ نقطهٔ ۱ را نسبت به کنارهٔ رودخانه رسم می‌کنیم و آن را نقطه ۴ می‌نامیم. طول پاره‌خط ۱ به ۳ با طول پاره‌خط ۴ به ۳ برابر است.

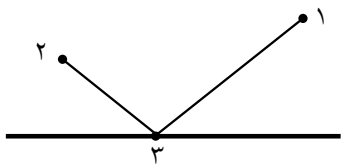


حالا به جای این‌که از ۱ به کنارهٔ رودخانه برویم و سپس به ۲ برویم، می‌توانیم فرض کنیم که می‌خواهیم از نقطهٔ ۴ بدون هیچ محدودیتی به نقطهٔ ۲ برویم!

کوتاه‌ترین مسیر برای رفتن از نقطهٔ ۴ به نقطهٔ ۲، خط راست است. پس خط راست را رسم می‌کنیم تا جای درست نقطهٔ ۳ را بیابیم.



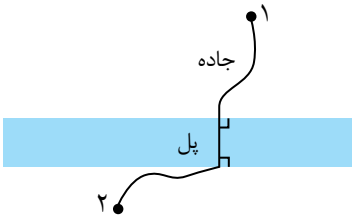
حالا می‌توانیم مسیر از ۱ به کنارهٔ رودخانه و بعد به ۲ را رسم کنیم.



مسئلهٔ ۴. قرار است بین دو نقطهٔ ۱ و ۲ جاده‌ای احداث شود. اما رودخانه‌ای در مسیر بین این دو نقطه وجود دارد و باید برای عبور از رودخانه، پلی ساخته شود. عرض رودخانه در همه‌جا یکسان است و دو کنارهٔ رودخانه خط‌هایی راست‌اند.

برای کاهش هزینه‌های احداث جاده باید هردوی این شرط‌ها برقرار باشند:

شرط اول: طول پل تا حد امکان کم باشد (یعنی پل بر دو طرف رودخانه عمود باشد).

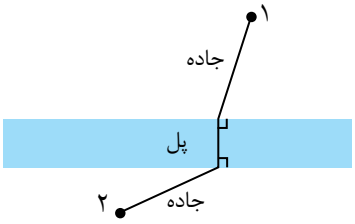


شرط دوم: حاصل‌جمع طول جاده و طول پل، کمترین مقدار ممکن باشد.

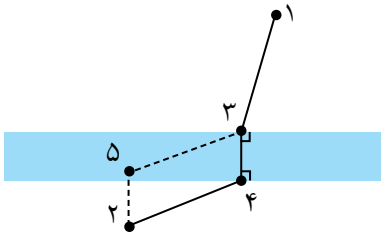
روی نقشه، جاده و پل را رسم کنید طوری‌که شرط‌های اول و دوم برقرار باشند.

جاده

راه‌حل: مانند مسئلهٔ قبل، جاده‌های دو طرف پل باید خط راست باشند.



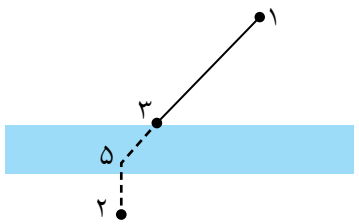
پس کافی است دو سر پل را مشخص کنیم. برای این کار، ترسیمی مانند شکل زیر انجام می‌دهیم.



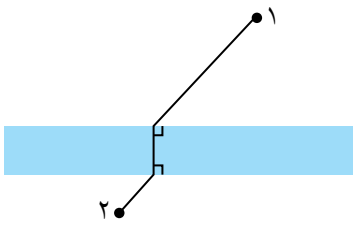
در شکل بالا، شکل پل را به نقطهٔ ۲ منتقل کرده‌ایم. به عبارت دیگر، پاره‌خطی موازی پل و به طول آن از ۲ رسم کرده‌ایم و نقطهٔ ۵ را یافته‌ایم. سپس از ۵ به ۳ پاره‌خطی رسم کرده‌ایم.

می‌توان ثابت کرد که چهارضلعی حاصل، متوازی‌الاضلاع است. پس فاصله ۲ تا ۴ با فاصلهٔ ۳ تا ۵ برابر است. نتیجه می‌گیریم طول مسیر ۱←۳←۵←۲ با طول مسیر ۱←۳←۴←۲ برابر است. پس طول ۱←۳←۵ برابر است با مجموع طول جاده‌ها.

حالا مشخص می‌کنیم که سر و ته پل کجا باید باشد. نقطهٔ ۳ باید جایی باشد که مسیر ۱←۳←۵ کمترین طول را داشته باشد. یعنی نقطهٔ ۳ باید روی پاره‌خط ۱ به ۵ قرار داشته باشد.

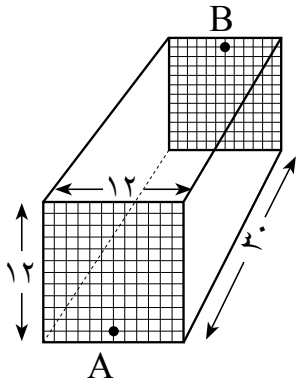


پس جای نقطهٔ ۳ معلوم شد. نقطهٔ ۴ با رسم خط عمود مشخص می‌شود. پس مسیر احداث جاده و پل به شکل زیر است.



نکته: از حل این مسئله نتیجه می‌گیریم برای کوتاه شدن مسیر، دو جاده باید با هم موازی باشند.

مسئلهٔ ۵: در شکل ۲۰، جعبه‌ای به شکل مکعب‌مستطیل می‌بینید. در نقطهٔ A عنکبوتی قرار دارد و در نقطهٔ B مگسی نشسته است. عنکبوت می‌خواهد از کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن روی جعبه حرکت کند و به مگس برسد. از چه مسیری باید برود؟

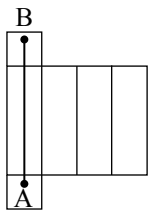


توضیح: در شکل ۲۰ طول هریک از مربع‌های کوچک برابر ۱ سانتی‌متر است؛ یعنی:

فاصلهٔ عنکبوت از کف جعبه برابر ۱ سانتی‌متر است و عنکبوت از هریک از سمت‌های راست و چپ جعبه، ۶ سانتی‌متر فاصله دارد.

فاصلهٔ مگس از سقف جعبه برابر ۱ سانتی‌متر است و مگس از هریک از سمت‌های راست و چپ جعبه، ۶ سانتی‌متر فاصله دارد.

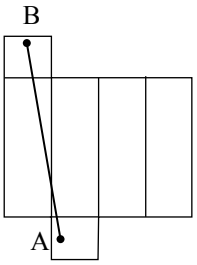
راه‌حل: بیایید ببینیم می‌توانیم همان راه‌حل مسئلهٔ ۱ را به کار ببریم یا نه. می‌خواهیم مکعب‌مستطیل شکل بالا را با استفاده از مقوا درست کنیم. شکل زیر را روی مقوا رسم می‌کنیم، نقاط A و B را مشخص می‌کنیم و خط راستی رسم می‌کنیم که از آن دو بگذرد.

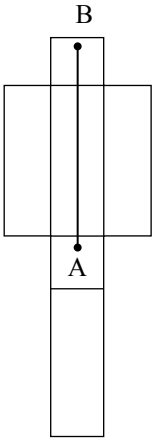


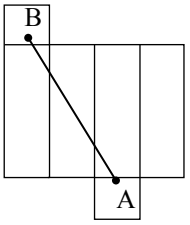
طول این مسیر برابر است با:

۱۱+۳۰+۱=۴۲

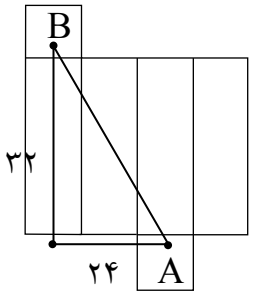
بر خلاف آن‌چه به نظر می‌رسد، مسئله هنوز حل نشده است! مکعب‌مستطیل را به روش‌هایی دیگر هم می‌توانیم درست کنیم. شکل‌های زیر را ببینید.







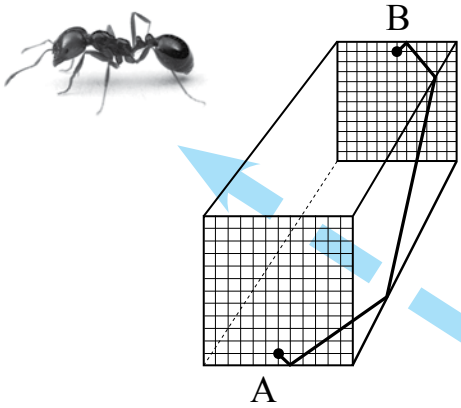
و تازه شکل‌های دیگری هم وجود دارند! اما کوتاه‌ترین مسیر، مسیری است که در شکل آخر دیده می‌شود. برای محاسبهٔ طول این مسیر، در شکل آخر دو پاره‌خط رسم می‌کنیم تا مثلثی قائم‌الزاویه تشکیل شود.



با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، معلوم می‌شود طول پاره‌خط AB در این شکل، برابر ۴۰ است.

حالا می‌توانیم با استفاده از این شکل، مکعب‌مستطیل را تشکیل دهیم و کوتاه‌ترین مسیر را روی آن ببینیم.

مسیر عجیبی است، نه؟



پرسش: آیا در مورد مسئلهٔ ۱، روش‌های متفاوت رسم مکعب روی مقوا، مسیرهایی با طول کمتر ایجاد نمی‌کند؟ شما بررسی کنید!

پی‌نوشت

با قضیهٔ تالس و قضیهٔ فیثاغورس، در سال سوم راهنمایی بیشتر آشنا می‌شوید.

منابع

1. http://www.cut - the- knot.org/Curriculum/Geometry/BuildingBridge.shtml

2. http://www.puzzles.com/puzzleplayground/spiderRide/SpiderRide.htm